

3. RANGO Y MATRIZ INVERSA

3.1. RANGO

Se llama **rango** de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ al número de filas no nulas de su forma canónica por filas, y lo notaremos por $\text{rango}(A)$.

Observación: Se verifica que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^t)$.

EJEMPLO 9

Calcula, mediante operaciones elementales, el rango de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

Por el ejemplo 8 se sabe que la forma canónica por filas de A es: $A_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

que tiene 3 filas no nulas. Por tanto, su rango es: $\text{rango}(A) = 3$.

3.2. MATRIZ INVERSA

Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, se dice que A es **regular** si existe otra matriz $A^{-1} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ tal que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$. La matriz A^{-1} recibe el nombre de **matriz inversa** de A .

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ se dice que es **singular** si no tiene inversa.

3.2.1. PROPIEDADES DE LA INVERSA

- La identidad y todas las matrices elementales son regulares.
- Si A es regular entonces A^{-1} es regular, y es: $(A^{-1})^{-1} = A$
- Si A es regular entonces A^t es regular, y es: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- Si A y B son regulares entonces AB es regular, y es: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- La matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ es regular si y sólo si $\text{rango}(A) = n$.
- La matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ es regular si y sólo si su forma canónica por filas es la matriz identidad I_n .

3.2.2. MATRIZ DE PASO

Por la relación dada entre operaciones elementales y matrices elementales, si $A_c \in \mathcal{M}_{n \times m}$ es la forma canónica por filas de la matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$, entonces

$$A_c = E_p \dots E_2 E_1 A$$

Donde E_i es la matriz elemental asociada a la operación i -ésima realizada.

Sea $E = E_p \dots E_2 E_1$ el producto de matrices elementales que intervienen en la obtención de la forma canónica por filas de A . Dado que $A_c = EA$ se dice que la matriz E es una **matriz de paso** de A a A_c .

Además la matriz E es regular, por ser producto de matrices regulares y puede ser construida, sin necesidad de calcular cada E_i , aplicando a la matriz identidad $I_n \in \mathcal{M}_{n \times n}$ las mismas operaciones elementales por filas hechas sobre A :

$$E = E_p \dots E_2 E_1 I_n$$

Así pues, para obtener las matrices A_c y E se deben realizar, respetivamente sobre A e I_m , las mismas operaciones elementales por filas y, por tanto, pueden calcularse simultáneamente operando sobre una matriz doble:

$$(A|I_m) \sim (E_1 A | E_1 I_m) \sim \dots \sim (E_p \dots E_2 E_1 A | E_p \dots E_2 E_1 I_m) = (A_c | E)$$

EJEMPLO 10

Obtener la forma canónica por filas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, y una matriz de paso

de A a su forma canónica por filas.

Solución:

Se construye la matriz $(A|I_4)$, y se hacen operaciones elementales por filas sobre esta matriz doble, hasta obtener la forma canónica por filas de A :

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{aligned}
& \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 3/4 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Se tiene que la forma canónica por filas de la matriz A y una matriz de paso son:

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que se verifica que:

$$EA = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_c$$

3.2.3. ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA

Cuando la matriz A es cuadrada y regular, su rango es máximo y su forma canónica por filas es la matriz identidad, es decir $A_c = EA = I$, de donde se deduce que $E = A^{-1}$.

Esto nos proporciona el siguiente algoritmo para calcular la inversa de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$

1. Construir la matriz doble $(A|I_n)$
2. Hacer operaciones elementales sobre la matriz doble $(A|I_n)$ hasta obtener la forma canónica por filas de A : $(A|I_n) \sim (A_c|E)$
3. Si $A_c = I_n$, entonces A es regular, y $A^{-1} = E$
4. Si $A_c \neq I_n$, entonces A es singular.

EJEMPLO 11

Estudiar si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es regular y, en caso afirmativo, calcular su inversa.

Solución:

Se construye la matriz $(A|I_3)$, y se hacen operaciones elementales por filas sobre esta matriz doble hasta obtener la forma canónica por filas de A :

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Puesto que la forma canónica es la identidad, la matriz A es regular y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.